Exercice 9 :

$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}$.

1. $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_0^1 dx = 1$.

Or $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \left[\ln|1+e^x|\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ d'où $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}+e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{1+e^x}dx = \int_0^1 e^{nx}dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n-1}{n}$.

On remplace n par 1, on obtient : $I_1 + I_2 = e - 1$, or $I_1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

donc $I_2 = e - 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. Puis on remplace n par 2 , on obtient :

$I_3 = \frac{1}{2} - e + \frac{e^2}{2} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

3. $I_{n+1} - I_n = \int \frac{e^{nx}(e^x-1)}{1+e^x}dx$ or $0 \le x \le 1$ donc $1 \le e^x \le e$ d'où $I_{n+1} - I_n \ge 0$ et par suite (I_n) est croissante.

4. On a $0 \le x \le 1 \Rightarrow 1 \le e^x \le e \Rightarrow 2 \le 1+e^x \le e+1 \le 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{1+e} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{nx}}{4} \le \frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}\int_0^1 e^{nx}dx \le I_n \le \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nx}dx \Rightarrow \frac{e^n-1}{4n} \le I_n \le \frac{e^n-1}{2n}$.

Or $\frac{e^n-1}{4n}$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ alrs I_n tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

© najah.com®